Une formulation étendue basée sur les matroids pour le problème de l'arbre couvrant avec contraintes de ressources

Charles Nourry[1], Ali Ridha Mahjoub[2], Hassène Aissi[2]

[1] Université Paris-Dauphine, LAMSADE, Paris, France
charles.nourry@dauphine.psl.eu
[2] Université Paris-Dauphine, LAMSADE, Paris, France
{ridha.mahjoub,hassan.aissi}@lamsade.dauphine.fr

Mots-clés : *optimisation combinatoire, approches polyhédrales, formulation étendue, inégalité valide, théorie des graphes*

Le problème de l'arbre couvrant de poids minimum est l'un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes. Pouvant être résolu en temps polynomial, ce n'est plus le cas lorsque l'on ajoute une ou plusieurs contraintes de budgets, formulées sous la forme d'inégalités de sac à dos. En effet, [1] ont montré que le problème est faiblement NP-difficile avec une contrainte de ressource, de plus il devient NP-difficile au sens fort à partir de deux contraintes de ressources. Ce problème possède de multiples applications, dans la pratique, avec par exemple le domaine de la télécommunication, on peut également le retrouver comme sous-problème de certaines décompositions. Dans ces travaux de thèse, nous nous intéressons à la résolution exacte de certains problèmes de conception de réseaux avec plusieurs contraintes de budgets. Nous étudions ces problèmes avec une approche basée sur la programmation mathématiques, ces contraintes de ressources vont venir modifier la structure des polyèdres, plus ou moins connus, associés aux problèmes de réseaux. L'objectif principal de notre travail est de comprendre ces nouvelles descriptions, trouver des inégalités valides, facettes et formulations étendues afin de concevoir des algorithmes de branchements efficaces pour résoudre ces problèmes de réseaux budgétés.

Nous étudions actuellement le problème de l'arbre couvrant de poids minimum avec plusieurs contraintes de budgets. Considérons un graphe $G = (V, E)$, où chaque arête $e \in E$ est associé à un vecteur $(c^1, \cdots, c^k) \in \mathbb{Q}^k$, où $k \in \mathbb{N}$ est fixé. On dispose de $k-1$ budgets pour chaque ressource $1, \cdots, k-1$, chaque ressource va être associée à une contrainte de budget, la dernière ressource k va constituer les coefficients de la fonction objectif. Plusieurs approches ont été utilisées pour résoudre ce problème, notamment des algorithmes d'approximations comme [3, 4]. Nous nous intéressons aux approches polyhédrales, avec par exemple la formulation suivante basée sur les contraintes de sous-tours (3). On associe à chaque arête $e \in E$ une variable binaire x_e (où $x_e = 1$ signifiant que l'arête appartient à la solution, $x_e = 0$ signifiant que l'arête n'appartient pas à la solution), on considère le programme linéaire en nombre entier suivant :

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{e\in E} c_e^k \cdot x_e & & \\
s.t. \sum_{e\in E(S)} x_e \leq |S|-1 & \qquad \forall S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq |V|-1 & (1)\\
\sum_{e\in E} x_e = |V|-1 & & (2)\\
\sum_{e\in E} c_e^i \cdot x_e \leq b^i & \qquad i=1,...,k-1 & (3)\\
x_e \in \{0,1\} & \qquad \forall e \in E & (4)
\end{aligned}
$$

Dans un premier temps, nous avons étudié différentes propriétés polyédrales du problème ; cas particuliers, relaxation, inégalités valides et dimension du problème. Et dans un second temps, nous analysons plusieurs formulations étendues, dont une approche basée sur les matroids ainsi que les travaux de Balas sur la programmation disjonctive [2]. Nos motivations sur la formulation étendue basée sur les matroids viennent d'un cas particulier du problème, qui constitue le cas où le système associé aux contraintes de ressources correspond à un matroid. Selon Edmonds, le polyhèdre associé à l'intersection de deux matroids est entier, or le problème de l'arbre couvrant peut être décrit par le matroid graphique. Dans la plupart des cas les contraintes de budgets ne correspondent pas à un matroid. Cependant, en divisant le problème il est possible de se retrouver avec un certains nombre de polyhèdres associés à des intersections de matroids. Nous utilisons les travaux de Balas pour retrouver un unique polyhèdre pour notre problème.

Notre approche basée sur les matroids nous permet d'obtenir une formulation étendue entière pour le problème dans le cas d'une contrainte de budget. Nous nous sommes ensuite intéressés à la projection de cette formulation dans la dimension des variables d'origines, cette projection correspond au polyhèdre entier pour le cas particulier d'une contrainte de ressource. En étudiant le cône de projection ainsi que ses rayons extrèmes, nous pouvons générer des inégalités valides, voir facettes associées.

Références

[1] Aggarwal, Vijay and Aneja, Yash P and Nair, KPK. *Minimal spanning tree subject to a side constraint.* Computers & Operations Research, 9(4) :287–296, 1982.

[2] Balas, Egon. Disjunctive programming. *Annals of discrete mathematics*, 5 :3–51, 1979.

[3] Ravi, R., Goemans, M. X. The constrained minimum spanning tree problem. *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, (pp. 66-75), 1996.

[4] Hassin, R., Levin, A. An efficient polynomial time approximation scheme for the constrained minimum spanning tree problem using matroid intersection. *SIAM Journal on Computing*, 33(2), 261-268, 2004.