Inégalités de dominance pour des problèmes de bi-partitions

Anne-Elisabeth Falq[1], Pierre Fouilhoux[2] and Safia Kedad-Sidhoum[3]

[1] Sorbonne Université, CNRS, LIP6, Paris, anne-elisabeth.falq@lip6.fr
[2] Université Sorbonne Paris Nord, CNRS, LIPN, Villetaneuse, pierre.fouilhoux@lipn.fr
[3] CNAM, CEDRIC, Paris, safia.kedad_sidhoum@cnam.fr

Mots-clés : *propriétés de dominance, inégalités linéaires, problème de la coupe maximum*

1 Inégalités de dominances

Pour un problème d'optimisation donné, un sous-ensemble de solutions est dit **dominant** (resp. strictement dominant) s'il contient au moins une solution optimale (resp. toutes les solutions optimales). On peut alors ce restreindre à ce sous-ensemble de solutions pour résoudre le problème. De nombreuses propriétés de dominances sont structurelles : elles assurent que les solutions optimales ont une certaine forme, une certaine structure. De telles propriétés peuvent permettre de modéliser le problème différemment et d'encoder les solutions de manière plus légère.

Nous nous intéressons ici à un autre type de propriétés de dominances : les dominances basées sur des voisinages. Elles reposent sur l'observation suivante. Étant donné **un voisinage** (*i.e.* une fonction qui à chaque solution associe l'ensemble des solutions voisines), l'ensemble des solutions localement optimales au sens de ce voisinage (*i.e.* les solutions meilleurs bonnes qu'une de leurs voisines). est un ensemble strictement dominant. En effet toute solution optimale est en particulier localement optimale. Cela justifie l'élimination des solutions non localement optimales.

Cette idée est largement exploitée dans les méthodes de recherche locale : si en explorant le voisinage d'une solution une solution strictement meilleure est trouvée, la première peut être éliminée. Lorsque le voisinage considéré est généré par une famille d'**opérations** sur les solutions (*i.e.* une famille de fonctions, éventuellement partielles, qui à une solution associent une autre solution), on peut procéder à l'élimination des solutions opérations par opération, et non solution par solution en explorant leur voisinage. En particulier, si la variation de la fonction objectif induite par une opération peut être exprimée de manière linéaire, une inégalité linéaire imposant que cette variation soit défavorable (*i.e.* positive en minimisation et négative en maximisation) permet d'éliminer des solutions non localement optimales. Plus précisément elle élimine toutes les solutions pour lesquelles appliquer l'opération permet d'obtenir une solution de meilleur fonction objectif.

Ce sont ces inégalités que nous appelons **inégalités de dominance**. Elles permettent de renforcer des programmes linéaires en nombres entiers (PLNE) d'une manière différentes des inégalités de renforcement classique qui éliminent des points fractionnaires et non des points encodant des solutions réalisables non optimales.

2 Opérations d'insertion et d'échange pour des problèmes de bipartition

Ce concept général a été introduit dans [1] pour un problème d'ordonnancement juste-à-temps sur une machine. Étant donné un ensemble de tâches J de durées fixées $(p_j)_{j\in J}$, de pénalités unitaires d'avance (resp. de retard) $(\alpha_j)_{j\in J}$ (resp. $(\beta)_{j\in J}$), et partagent une même date d'échéance non restrictive $d \geqslant \sum_{j \in J} p_j$, ce problème consiste minimiser la pénalité d'avance-retard globale d'un ordonnancement, c'est-à-dire $\sum_{j \in J} \alpha_j \max(d - C_j, 0) + \beta_j \max(0, C_j - d)$ si $(C_j)_{j \in J}$ désigne les dates de fin des tâches.

Grâce à des propriétés de dominance structurelles communes en ordonnancement, ce problème un problème se ramène à un problème de bipartition. En effet, le coût d'un ordonnancement dépend uniquement de sa **répartition avance-retard**, c'est-à-dire de quelles tâches sont en avance (*i.e.* finissent à une date $C_j \leqslant d$) et quelles tâches sont en retard (*i.e.* les autres). Cette modélisation permet de formuler le problème comme un PLNE compact, dont les variables, booléennes, indiquent si les tâches sont en avance, et si les paires de tâches présentent une tâche en avance et une tâche en retard. La résolution de cette formulation PLNE avec le solveur Cplex utilisé en boîte noire permet de résoudre des instances jusqu'à 50 tâches en 1h, mais pas celles à 60 tâches.

Pour améliorer les performances de cette approche, des inégalités de dominances ont été proposées. Elles sont basées sur deux opérations assez naturelles sur les bipartitions. L'**insertion**, qui consiste à enlever un élément d'une partie pour le placer dans l'autre, et l'**échange** qui consiste à intervertir un élément d'une partie avec un élément de l'autre partie. En ajoutant ces inégalités à la formulation, des instances jusqu'à 150 tâches ont pu être résolues en 1h.

Le problème de la **coupe maximum** est lui aussi un problème de bipartition, puisqu'il consiste à répartir les sommets d'un graphe en deux sous-ensembles non vides de manière à minimiser la somme pondérée des arêtes allant de l'un à l'autre. De ce fait les opérations d'insertion et d'échange s'appliquent aussi pour ce problème. On en déduit ici aussi des inégalités de dominance.

Les expérimentations sur des formulations PLNE de ce problème sont en cours, mais présentent déjà des résultats positifs sur certaines classes d'instances de la librairie biq-mac, en particulier en terme de réduction du nombre de nœuds du schéma de branch-and-bound. De plus ces inégalités de dominance pourraient aussi être ajoutées à des formulations quadratiques de ce problème.

References

[1] Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux et Safia Kedad-Sidhoum *Dominance inequalities for scheduling around an unrestrictive common due date.* arXiv:2102.07382, 2021, `https://arxiv.org/abs/2102.07382`,