

Fonctions de Walsh pour le benchmarking des métaheuristiques

Mahmoud Omidvar¹, Sara Tari¹, Sébastien Verel¹

Laboratoire LISIC, Université du Littoral Côte d’Opale, France
{omidvar, sara.tari, verel}@univ-littoral.fr

Mots-clés : *optimisation, métaheuristiques, fonctions de Walsh, benchmark*

1 Introduction

Les fonctions de Walsh [1] forment une base orthogonale de fonctions pseudo-booléennes permettant de représenter n’importe quelle fonction pseudo-booléenne et suscitent un fort intérêt dans différentes communautés scientifiques. En physique quantique, elles sont utilisées pour créer des benchmarks pour représenter des problèmes d’optimisation pouvant être naturellement optimisés au moyen des nouvelles machines quantiques [2]. Dans le domaine de l’optimisation combinatoire boîte noire, elles sont utilisées avec succès en tant que fonction de substitution (surrogate, modèle d’apprentissage) aux fonctions coûteuses en terme de calcul [3].

Les fonctions de Walsh permettent aussi de reformuler de manière standardisée des problèmes d’optimisation académiques divers, et peuvent également être utilisées à des fins de benchmarking en générant des instances de problèmes aux caractéristiques variées, incluant des caractéristiques similaires aux instances réelles. Cela offre un cadre idéal pour étudier la dynamique d’algorithmes de résolution approchée tels que les métaheuristiques dont la dynamique et l’efficacité relative diffèrent en fonction des caractéristiques de l’instance à optimiser.

Améliorer la compréhension des métaheuristiques et plus généralement des algorithmes d’optimisation combinatoire via des travaux empiriques nécessite de les étudier dans différents cadres et d’extraire des informations relatives aux caractéristiques des instances traitées. Face à la multitude de composants possibles pour les métaheuristiques et leurs interactions régulièrement complexes, mener de tels travaux implique un fort effort expérimental, ainsi les nombreux résultats produits pourraient à terme être exploités à des fins de sélection automatique d’algorithmes via des approches d’apprentissage supervisé.

2 Contexte et objectifs

2.1 Fonctions de Walsh pour le benchmarking

Dans le cadre des fonctions pseudo-booléennes sur $\{0, 1\}^n$, les fonctions de Walsh forment un ensemble fini de 2^n fonctions $\varphi_k : \{0, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ définies par : $\varphi_k(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} k_i x_i}$ où x_i est le i^{eme} bit de x , et k_i est le i^{eme} bit représentant l’entier k . Les fonctions de Walsh sont une base orthonormale des fonctions pseudo-booléennes, toute fonction pseudo-booléenne $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ peut s’écrire par : $f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_k \varphi_k(x)$ avec $w_k \in \mathbb{R}$. De plus, w_k est la projection orthogonale de f sur φ_k : $w_k = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0, 1\}^n} f(x) \varphi_k(x)$.

Les fonctions de Walsh permettent une décomposition équivalente à une décomposition polynomiale (ou à une décomposition de Fourier). L’ordre d’une fonction de Walsh φ_k est déterminé par le nombre de bits à 1 dans la représentation binaire de k . Par exemple, une fonction de Walsh d’ordre 2 s’écrit par : $w_0^{(0)} + \sum_{i=0}^n w_i^{(1)} \sigma_i + \sum_{i < j} w_{i,j}^{(2)} \sigma_i \sigma_j$ avec $\sigma_i = (-1)^{x_i}$.

Dans une perspective de benchmarking, en plus de pouvoir représenter toute fonctions déjà utilisées pour le benchmarking, les fonctions de Walsh permettent de régler finement à la fois l’interdépendance entre les variables (termes non nuls du polynôme) et l’intensité des interactions (valeur $|w_k|$), ou encore le nombre de valeurs différentes possibles (neutralité).

Nous allons les utiliser pour définir des fonctions d'un benchmark. La définition est en deux niveaux. Le premier définit des sous-problèmes par blocs de variables. Ces blocs pourront être indépendants, ou bien interdépendants en utilisant un graphe de dépendance. Différents poids pourront être attribués à chaque variable ou à chaque bloc afin de se rapprocher de caractéristiques d'instances réelles. Le second niveau agrège les sous-problèmes de manière polynomiale (somme et produits des sous-problèmes).

2.2 Paysage de fitness et performance

Diverses métaheuristiques seront testées sur les benchmarks générés, ce qui permettra d'observer les différences dans leur performance et leur dynamique de recherche, et d'obtenir des informations sur la balance appropriée entre exploitation et exploration à adopter sur les différents benchmarks. Dans ce cadre, on s'intéressera aux recherches locales et aux algorithmes évolutionnaires. Pour ces différentes classes d'algorithmes, il existe de nombreux composants qui influent sur la dynamique de la recherche. Nous étudierons l'impact de différentes configurations sur un panel d'instances variées afin de mieux comprendre leur fonctionnement.

Une manière d'étudier des instances consiste à effectuer l'analyse du paysage de fitness qui représente l'espace de recherche relativement à la relation de voisinage. Cette représentation permet d'extraire des caractéristiques relatives à la structure de l'espace de recherche sur laquelle les métaheuristiques naviguent pour mieux comprendre les critères influant sur leur capacité à atteindre de bonnes solutions et prédire leur performance. Dans ce cadre, nous prévoyons d'utiliser différents indicateurs pour estimer des caractéristiques classiques des paysages, telles que la rugosité ou la neutralité [4] qui seront soit calculées analytiquement, soit estimées statistiquement sur l'instance. Enfin, le modèle des réseaux d'optima locaux sera utilisé pour mettre en évidence des caractéristiques relatives à la structure globale des paysages en complément des indicateurs classiques.

3 Travaux préliminaires

L'objectif des premiers travaux est de mettre en place les premiers algorithmes et indicateurs de paysages de fitness qui seront utilisés comme base pour étudier les différents benchmarks produits. Les premières expérimentations sont réalisées sur des instances du problème *tile planting* [2] issu de la physique quantique. Nous étudions des algorithmes de recherche locale itérée (ILS), qui alternent des phases de descente et des phases de perturbations. Nous considérons trois règles pivot pour la sélection de voisin au sein de descentes : les premier, meilleur et moins bon améliorant [5]. Sur chaque paysage, chaque méthode est exécutée 30 fois pour une même durée. Pour étudier la structure des paysages nous employons différents indicateurs relatifs à la rugosité, la neutralité et l'isotropie. Les résultats seront présentés à la conférence.

Références

- [1] J. L. Walsh *A Closed Set of Normal Orthogonal Functions*. American Journal of Mathematics, 1923.
- [2] Dilina Perera et. al. *Chook—A comprehensive suite for generating binary optimization problems with planted solutions*. arXiv preprint arXiv :2005.14344, 2020.
- [3] Sébastien Verel et. al. *A Surrogate Model Based on Walsh Decomposition for Pseudo-Boolean Functions* Parallel Problem Solving from Nature PPSN XV, p. 181-193, 2018.
- [4] Katherine M. Malan *A Survey of Advances in Landscape Analysis for Optimisation*. Algorithms, 2021, vol. 14, no 2, p. 40, 2021.
- [5] Sara Tari, Matthieu Basseur, Adrien Goëffon *Worst improvement based iterated local search*. European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, 2018.