Une approximation asymptomatique du problème du voyageur de commerce avec fenêtres temporelles

Omar Rifki,Thierry Garaix

Mines Saint-Etienne, Univ Clermont Auvergne, CNRS, UMR 6158 LIMOS, Centre CIS, Departement I4S, F-42023 Saint-Etienne France.

{omar.rifki,garaix}@emse.fr

1 Introduction

Le calcul du cycle hamiltonien le plus court pour un certain nombre de points est un problème NP-difficile, connu sous le nom du problème du voyageur de commerce (TSP). Pour un grand nombre de points, cette opération devient fastidieuse, même si des approches de résolution heuristique sont utilisées. Dans un grand nombre de situations, seule une approximation de la longueur optimale du tour est nécessaire. Être capable de fournir rapidement une approximation fiable avec des efforts réduits est en fait essentiel pour la conception de systèmes logistiques et de distribution de plusieurs services. Par exemple, certains systèmes postaux, qui ont généralement tendance à avoir un grand nombre de livraisons, reposent sur des approximations continues de la longueur des tournées pour partitionner le territoire de service [2].

Dans ce résumé, nous étendons le traitement asymptotique continu au TSP avec fenêtres temporelles (TSP-TW), en se basant sur le théorème bien connu de Beardwood-Halton-Hemmersley (BHH) [1]. Pour le modèle de fenêtre temporelle, nous utilisons une partition de l'horizon temporel en intervalles égales.

2 L'approximation asymptotique du TSP-TW

2.1 Le théorème de BHH et les hypothèses du modèle

Théorème 1 (BHH (1959)) *Pour un ensemble de n variables aléatoires $\{X_1, ..., X_n\}$ $(0 < n < \infty)$ distribuées indépendamment et de manière identique sur un support compact $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ selon une distribution $f(.)$, il existe une constante β^{tsp} tel que la longueur L_n^{tsp} du plus court cycle liant les réalisations de X_i sous la métrique euclidienne satisfait,*

$$\frac{L_n^{tsp}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta^{tsp} \int_{\mathcal{R}} \sqrt{\overline{f}(x,y)}\, dx\, dy,$$

avec $\overline{f}(.)$ la partie absolument continue de la fonction de densité $f(.)$.

Sous une distribution uniforme des variables aléatoires $\{X_1, ..., X_n\}$, la formule BHH devient, $L_n^{tsp}/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta^{tsp}\sqrt{|\mathcal{R}|}$, où $|\mathcal{R}|$ est l'aire de la surface $\mathcal{R}$.

Nous considérons des instances du TSP-TW générées aléatoirement selon quatre paramètres d'entrée : n le nombre de points à visiter, m le nombre de fenêtres temporelles, h l'horizon temporel et la taille du côté a de la surface carrée. Les hypothèses de notre modèle sont :

- Les n points sont indépendamment et uniformément distribués sur le plan *euclidien* $\mathbb{R}^2$ dans une zone carrée $\mathcal{R}$, *i.e.* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le a, \ \text{ et } \ 0 \le y \le a\}$.
- m fenêtres temporelles de taille égale et sans chevauchement sont définies en partitionnant l'horizon temporel, noté h. Ainsi, chaque fenêtre temporelle a une longueur de h/m.
- Les n points sont indépendamment et uniformément distribués sur les fenêtres de temps.

2.2 L'approximation asymptotique

Propriété 1 (condition de faisabilité) *Selon le modèle de génération aléatoire TSP-TW défini dans la sous-section précédente, le front Pareto (n, m) des tours faisables liant les réalisations des n points aléatoires sous la métrique euclidienne satisfait en moyenne,*

$$n \times m = \frac{h^2}{|\mathcal{R}| \; (\beta^{tsp})^2} \tag{1}$$

Propriété 2 (les approximations) *Selon le modèle de génération aléatoire TSP-TW défini dans la sous-section précédente, la longueur $L^{tsptw}_{n,m}$, le temps d'attente total $W^{tsptw}_{n,m}$, et l'heure d'arrivée $Z^{tsptw}_{n,m}$ asymptotique du plus court cycle hamiltonien liant les réalisations des n points aléatoires sous la métrique euclidienne et la condition de faisabilité (1) satisfont,*

$$L^{tsptw}_{n,m} = \beta^{tsp} \sqrt{n \; m \; |\mathcal{R}|} + o\Big(\sqrt{n \; m}\Big). \qquad Z^{tsptw}_{n,m} = \frac{m-1}{m} \; h + \beta^{tsp} \sqrt{\frac{n}{m} \; |\mathcal{R}|} + o\Big(\sqrt{\frac{n}{m}}\Big).$$

$$W^{tsptw}_{n,m} = \frac{m-1}{m}\Big(h - \beta^{tsp} \sqrt{n \; m \; |\mathcal{R}|}\Big) + o\Big(\sqrt{\frac{n}{m}} \; (m-1)\Big).$$

2.3 Une simulation aléatoire

Nous utilisons la programmation dynamique pour le calcul du tour hamiltonien optimal selon la longueur du tour, *i.e.* le temps de voyage sans comptabiliser les attentes. On considère un carré $\mathcal{R}$ d'un diamètre égal à une durée d'une heure, *i.e.* $a = 3600/\sqrt{2}$, et un horizon temporel fixé à dix heures $h = 10 \times 3600$. Cent instances du TSP-TW sont générées aléatoirement pour chaque valeur de (n, m), où $n \in \{30, 32, ..., 58, 60\}$ et $m \in \{2, 3, 4, ..9, 10\}$. Figure 1 montre l'écart de qualité moyen pour les longueurs des tournées, définit pour chaque instance comme $|L^{tsptw}_{n,m} - L|/L$, avec L la longueur optimale de la tournée. De même, nous définissons les écarts pour $W^{tsptw}_{n,m}$ et $Z^{tsptw}_{n,m}$.

Références

[1] Jillian Beardwood, John H Halton, and John Michael Hammersley. The shortest path through many points. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 55, pages 299–327. Cambridge University Press, 1959.

[2] Anna Franceschetti, Ola Jabali, and Gilbert Laporte. Continuous approximation models in freight distribution management. *Top*, 25(3) :413–433, 2017.

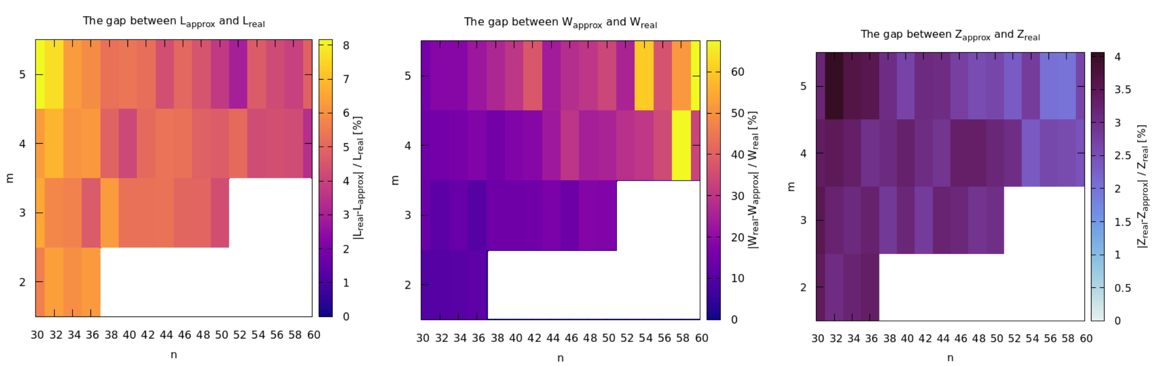

FIG. 1 – L'écart absolu moyen entre les approximations de la propriété 2 et les valeurs optimales des instances faisables de la similation définie dans la sous-section 2.3. L'écart absolu moyen est donnée pour chaque valeur de (n, m). La zone blanche correspond aux instances qui ne sont pas résolues dans notre limite de temps CPU.