Méthodes de décomposition pour le problème de flot insécable

Francois Lamothe[1], Alain Haït[1], Emmanuel Rachelson[1]
Cédric Baudoin[2], Mathieu Gineste[2], Jean-Baptiste Dupé[3]
[1] ISAE-Supaéro, DISC, Toulouse, France
{francois.lamothe, alain.hait, emmanuel.rachelson}@isae.fr
[2] Thalès Alenia Space, Toulouse, France
{cedric.baudoin,mathieu.gineste}@thalesaleniaspace.com
[3] Centre National d'Études Spatiales, France
Jean-Baptiste.Dupe@cnes.fr

Mots-clés : *Flot insécable, décomposition de Dantzig-Wolfe, décomposition de Fenchel, séparation de polyèdres*

1 Introduction

Le problème de flot insécable est une variante très étudiée du problème de flot multi-commodités. Dans ce problème, un graphe orienté ou non est donné, ainsi que des capacités sur ses arcs. Une famille de commodités, chacune composée d'une origine, d'une destination et d'une demande, est également fournie. Chaque commodité doit acheminer sa demande de son origine à sa destination par un unique chemin. Ce routage doit garantir que les capacités des arcs ne sont pas dépassées par le flot total des commodités, ou du moins minimiser la violation des capacités.

Comme souvent pour les problèmes pouvant se modéliser à l'aide de la Programmation Linéaire en Nombre Entier, la relaxation linéaire du problème de flot insécable joue un rôle majeur dans sa résolution. Dans le cas des flots insécables, la relaxation linéaire est le problème de flot multi-commodités. Ce problème est identique à celui des flots insécables à la différence que les commodités sont autorisées à utiliser plusieurs chemins pour acheminer leur demande. Cette relaxation linéaire peut être utilisée pour trouver des bornes sur la valeur de la solution optimale qui s'intègrent dans des méthodes de *Branch and Bound*. Ce type d'approche est proposé dans le travail majeur de Barnhart et al. [2000].

Afin d'obtenir de meilleures bornes et ainsi accélérer le processus de *Branch and Bound*, il est intéressant de renforcer la relaxation linéaire. Trois types d'approche ont été proposés dans la littérature pour atteindre ce but. D'une part, Barnhart et al. [2000] proposent d'ajouter des coupes heuristiques valides pour les contraintes de capacités du problème basées sur les *lifted cover cuts*. D'autre part, Belaidouni and Ben-Ameur [2003] proposent des coupes basées sur les fonctions super-additives. Ce type de coupe peut générer l'ensemble des coupes valides pour les contraintes de capacités au prix d'un temps de calcul très élevé. Une approche heuristique plus rapide est aussi envisagée. Enfin, Park et al. [2003] proposent d'appliquer une décomposition de Dantzig-Wolfe aux contraintes de capacités. Cette approche nécessite d'ajouter un processus de génération de colonnes supplémentaire mais permet d'obtenir une relaxation aussi forte que si l'ensemble des coupes valides avaient été ajouté.

Dans ce travail, proposons d'appliquer d'autres méthodes de décomposition afin de renforcer la relaxation linéaire du problème. En particulier, nous proposons d'utiliser la décomposition de Fenchel ainsi que la décomposition Lagragienne. Ces deux méthodes sont ensuite comparées expérimentalement à la décomposition de Dantzig-Wolfe proposée dans [Park et al., 2003].

2 Décomposition de Fenchel

Soit $(P1)$ une formulation d'un problème de Programmation Linéaire en Nombre Entier :

$$
\begin{array}{ll}
(P1)\min\limits_{x} cx & (P2)\max\limits_{\pi,\pi_0} \pi\hat{x} - \pi_0 \\
Ax \leq b & \pi x_i \leq \pi_0 \ \forall x_i \in \mathcal{P} \\
x \in \{0,1\}^n & \pi, \pi_0 \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

La méthode de la décomposition de Fenchel, proposée dans [Boyd, 1994], est la suivante. Soit $\mathcal{P} = \{x \in \{0,1\}^n | Ax \leq b\}$ le polyèdre issu des contraintes du problème $(P1)$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^{+n}$ une solution optimale de la relaxation linéaire de $(P1)$. A chaque itération de la décomposition, une coupe $\pi x \leq \pi_0$ séparant $\hat{x}$ de $\mathcal{P}$ est créée (si une telle coupe existe) afin de renforcer la relaxation linéaire. Pour ce faire, on cherche la coupe la plus violée par $\hat{x}$, *c-à-d* maximisant $\pi\hat{x} - \pi_0$, et valide pour le polyèdre $\mathcal{P}$, *c-à-d* tel que $\forall x_i \in \mathcal{P}$ $\pi x_i \leq \pi_0$. Le calcul de cette coupe se fait donc avec le problème $(P2)$. Une fois la coupe trouvée, elle est ajoutée au modèle principal pour lequel la relaxation linéaire est de nouveau calculée. Le processus continue jusqu'à ce que la coupe calculée ne sépare pas $\hat{x}$ de $\mathcal{P}$ ce qui implique que $\hat{x} \in \mathcal{P}$ et donc que $\hat{x}$ est la solution optimale du problème $(P1)$.

Nous discutons aussi dans ce travail une manière équivalente d'obtenir la décomposition de Fenchel . Elle consiste en l'application successive d'une décomposition de Dantzig-Wolfe et d'une décomposition de Benders au problème $(P1)$. En appliquant une décomposition de Dantzig-Wolfe, une variable λ_i est créée pour chaque sommet x_i du polyèdre $\mathcal{P}$ créant ainsi le problème $(P3)$. Dans la décomposition de Benders, ces nouvelles variables sont isolées dans le sous-problème $(P4)$ dont on prend ensuite le dual qui se trouve être exactement le problème $(P2)$. Finalement, le sous problème de Benders est égal au sous-problème de Fenchel et dans les deux approches les coupes générées sont ajoutées à la relaxation linéaire du problème $(P1)$.

$$
\begin{array}{ll}
(P3)\min\limits_{x,\lambda_i} cx & (P4)\min\limits_{\lambda_i} 0 \\
x = \sum\limits_i \lambda_i x_i & \sum\limits_i \lambda_i x_i = \hat{x} \\
\sum\limits_i \lambda_i = 1 & \sum\limits_i \lambda_i = 1 \\
x \in \mathbb{R}^{+n}, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ & \lambda_i \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

Dans ce travail nous présentons une comparaison expérimentale de cette méthode de décomposition avec des méthodes de décomposition Lagragienne et de Dantzig-Wolfe sur des instances du problème de flot insécable.

Références

Cynthia Barnhart, Christopher A Hane, and Pamela H Vance. Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*, 48 (2) :318–326, 2000.

M Belaidouni and W Ben-Ameur. A superadditive approach to solve the minimum cost single path routing problem : Preliminary results. In *Proc. International Network Optimization Conference (INOC'2003)*, pages 67–71, 2003.

E Andrew Boyd. Fenchel cutting planes for integer programs. *Operations Research*, 42(1) : 53–64, 1994.

Sungsoo Park, Deokseong Kim, and Kyungsik Lee. An integer programming approach to the path selection problems. In *Proceedings of the International Network Optimization Conference INOC, Evry-Paris, France*, pages 448–453, 2003.