Bornes dans le pire cas lors d'un partage de budget commun

Pierre Cardi, Laurent Gourvès, Julien Lesca

Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016 Paris, France

{laurent.gourves,julien.lesca}@lamsade.fr

pierre.cardi@dauphine.psl.eu

Mots-clés : *choix social computationnel, équité*

1 Introduction

On étudie un problème de répartition d'un budget commun à n agents. Ces derniers soumettent des demandes de financement à une autorité centrale, qui décide de les accepter ou non. L'utilité d'un agent est la proportion du budget qu'il reçoit. Idéalement, on souhaiterait que chaque agent reçoive une fraction $\frac{1}{n}$ du budget. En pratique, cela est rarement possible, puisque les demandes sont considérées indivisibles : chaque demande sera rejetée ou entièrement acceptée. Notre objectif est de borner dans le pire cas la plus grande proportion du budget allouée à l'agent le plus pauvre. Notre approche ne sera donc pas de raisonner sur chaque instance en résolvant le problème de type max-min correspondant (qui serait d'ailleurs NP-difficile), mais plutôt de raisonner sur des classes d'instances. La valeur de la plus importante demande rapportée au budget, ainsi que le nombre d'agents seront deux paramètres essentiels. On proposera alors de borner la meilleure utilité de l'agent le plus pauvre, dans le pire cas, pour la classe d'instance où les deux paramètres cités sont fixés. Nous avons obtenu une caractérisation de cette quantité pour les cas à un et deux agents, ainsi qu'une approximation à $\frac{14}{15}$ près de l'optimum pour le cas général. De plus, chaque borne est accompagnée d'un algorithme polynomial qui, pour chaque instance, renvoie une solution en ligne avec les bornes proposées. Ce type de démarche a déjà été exploré par Markakis et Psomas [2] pour le problème du partage d'objets indivisibles. Notons également que des détails peuvent être consultés dans notre article [1] qui paraîtra prochainement.

2 Modèle et notations

Considérons que n agents se partagent un budget $B \in \mathbb{R}_+$. Chaque agent j possède un ensemble de demandes $D^j = \{d^j_1, \ldots, d^j_{m^j}\}$ où chaque d^j_i est un réel positif non nul.

Nous faisons également les hypothèses que toute demande est non nulle et inférieure au budget, et la somme des demandes de chaque agent dépasse B/n. Nous notons la plus grande demande $d^* = \max_{i,j} d^j_i$ et $\alpha = d^*/B$. La valeur d'un ensemble de demandes X est notée $v(X) = \sum_{d \in X} d$. Une solution réalisable $(S^1, \ldots, S^n)$ consiste en n sous-ensembles de demandes acceptées $S^j \subset D^j$ vérifiant : $\sum_{j \in \{1,\ldots,n\}} v(S^j) \leq B$. L'utilité de l'agent j sera simplement $v(S^j)$. Nous nous intéressons à la *meilleure* fonction $\rho_n :]0,1] \to [0,1]$ telle que pour toute instance dont α est la plus grande demande comparée au budget, il existe une solution $(S^1, \ldots, S^n)$ vérifiant $v(S^j) \geq \rho_n(\alpha)B$ pour tout agent j. Par *meilleure* nous entendons que $\rho_n(\alpha)$ doit être le plus grand possible. Plus formellement, posons $\mathsf{Inst}(n, \alpha)$ l'ensemble des instances à n agents et de paramètre α. Pour une instance $I \in \mathsf{Inst}(n, \alpha)$ ayant un budget B_I, notons $Z^*_I B_I$ l'utilité maximum de l'agent le plus pauvre. On a alors :

$$\rho_n(\alpha) = \inf_{I \in \mathsf{Inst}(n,\alpha)} (Z^*_I)$$

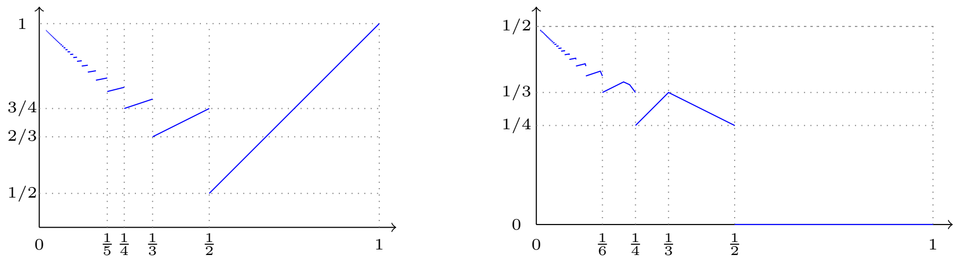

FIG. 1 – $\rho_1(\alpha)$ à gauche et $\rho_2(\alpha)$ à droite.

Notre but est donc de déterminer la fonction ρ_n. Revenons à l'exemple d'introduction. On a $D^1 = \{29, 25, 20\}$ et $D^2 = \{19, 17, 16\}$. Le budget étant de 100, on obtient $\alpha = 29/100$. Il s'avère que $\rho_2(\frac{29}{100}) = \frac{43}{100}$, ce qui signifie qu'il doit exister une solution où tout agent obtient au moins 43. Ceci est vrai pour la solution $S^1 = \{25, 20\}$ et $S^2 = \{19, 17, 16\}$.

3 Résultats

Dans le cas d'un agent, nous avons caractérisé ρ_1. Il apparaît que le cas $n = 1$ joue un rôle important dans l'analyse des cas à plusieurs agents. Le cas $n = 2$ s'est révélé être plus difficile. La démarche générale étant de partager le budget entre les deux agents, puis de traiter chaque agent séparément. La difficulté principale est alors de savoir comment diviser le budget. En effet, on ne peut pas simplement le partager en deux parts égales, nous avons alors proposé une méthode algorithmique permettant de répartir le budget efficacement. De façon surprenante, les fonctions ρ_1 et ρ_2 ne sont ni continues, ni monotones (c.f. Figure 1).

Dans le cas général, nous avons déterminé une fonction $\tilde{\rho}_n$ qui est une approximation de ρ_n à un facteur $\frac{14}{15}$ près. Pour chaque valeur de n, nous avons proposé un algorithme polynomial retournant une solution respectant les bornes que l'on a calculées. En effet, notons f_n la borne calculée pour n donné (f_n peut être égale à ρ_n ou $\tilde{\rho}_n$), il existe nécessairement une solution $(S^1, \ldots, S^n)$ vérifiant :

$$v(S^j) \geq f_n(\alpha)B \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \tag{1}$$

Nous proposons donc des algorithmes polynomiaux retournant des solutions vérifiant (1).

4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé des bornes dans le pire cas sur l'utilité de l'agent le moins bien servi, dans le cadre d'un partage de budget commun.

Implicitement, l'utilité d'une demande est rigoureusement égale à sa valeur. Une possibilité pour la suite pourrait être de relaxer cette hypothèse, rendant la modélisation plus réaliste. Cela nous amènerait à considérer un problème de type KNAPSACK multi-agent plutôt qu'un problème de type SUBSET SUM multi-agent.

Références

[1] Pierre Cardi, Laurent Gourvès, and Julien Lesca. Worst-case bounds for spending a common budget. In *The 20th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS 2021, Online, May 3 - May 7, 2021*, 2021.

[2] Evangelos Markakis and Christos-Alexandros Psomas. On worst-case allocations in the presence of indivisible goods. In *Internet and Network Economics - 7th International Workshop, WINE 2011, December 11-14, 2011*, pages 278–289, Singapore, 2011. Springer.