Encadrement linéaire pour l'optimisation sous contraintes de la norme euclidienne du plan

Aloïs Duguet Christian Artigues Laurent Houssin
Sandra Ulrich Ngueveu

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INP, UPS, Toulouse, France
aduguet@laas.fr

1 Introduction

Les fonctions linéaires par morceaux (piecewise linear, PWL) sont couramment utilisées pour approximer des problèmes d'optimisation contenant des termes non linéaires en programmes linéaires en nombres entiers (PLNE). Par exemple, un problème avec une fonction objectif non linéaire et des contraintes linéaires s'approxime en PLNE en remplaçant uniquement la fonction objectif par une fonction PWL. Nos travaux traitent le cas de la linéarisation par morceaux de la norme euclidienne dans le plan. Un encadrement linéaire de cette fonction respectant une erreur prédéfinie et utilisant un nombre minimal de morceaux est décrit, que ce soit pour une linéarisation de la fonction objectif, ou de certaines contraintes. La pertinence de cette linéarisation est montrée sur une application de télécommunication : le problème de *beam layout*.

2 Etat de l'art

Pour approximer une fonction non linéaire par une fonction PWL, deux critères contradictoires sont à considérer : minimiser l'erreur d'approximation de la fonction non linéaire par la fonction PWL, et utiliser peu de morceaux pour obtenir une formulation de PLNE avec moins de variables binaires et de contraintes, qui est plus rapide à résoudre [2]. Nos travaux s'intéressent au problème suivant : donner un encadrement linéaire à erreur relative ϵ fixée tout en minimisant le nombre de morceaux. Ce problème est noté $\mathcal{P}^{\epsilon}_{\mathrm{PWL}}$. Dans le cas d'une fonction à une variable, [3] par exemple décrit un algorithme exact mais aussi un algorithme de type glouton donnant une fonction PWL qui utilise un nombre de morceaux dont l'écart à l'optimum est borné par le nombre de zones concaves ou convexes moins un. En revanche, pour des fonctions de plusieurs variables, seules des heuristiques étudient cet objectif, avec en général des limitations importantes sur la position des sommets comme dans [4]. Ces limitations sur la position des sommets donnent des fonctions PWL avec plus de morceaux que dans une solution optimale, mais la prise en compte à la fois de la minimisation du nombre de morceaux et du respect de l'erreur d'approximation engendrerait des modèles plus complexes, de temps de résolution trop long en pratique. Nos travaux surmontent cette difficulté en donnant une solution analytique exacte du problème $\mathcal{P}^{\epsilon}_{PWL}$ pour la norme euclidienne dans le plan.

3 Principe et expression analytique

La linéarisation de la norme euclidienne décrite ci-dessous est tirée de [1]. Soit $P > 2$ un nombre entier et $u_i = (\cos\frac{2i\pi}{P}, \sin\frac{2i\pi}{P})$ pour $i = 1, ..., P$ des vecteurs de norme 1 de $\mathbb{R}^2$. Pour $\Delta > 0$, on peut linéariser la contrainte (1) en la remplaçant par les contraintes (2) avec $d = 1$

pour la relâcher, et $d = \cos\frac{\pi}{P}$ pour la renforcer :

$$||x||_2 \leq \Delta \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$x.u_i \leq d\Delta \quad \forall i = 1, ..., P \tag{2}$$

Nous démontrons que ces deux linéarisations qui utilisent P morceaux forment un encadrement linéaire solution optimale de $\mathcal{P}^{\epsilon}_{PWL}$ avec $\epsilon = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{P}} - 1$, pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Deux extensions de ce résultat à l'approximation de normes ayant des lignes de niveaux de forme elliptique et à la linéarisation de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ dans la fonction objectif sont également décrites. La première découle du fait que toute ellipse peut être obtenue par déformation linéaire d'un cercle. La deuxième vient de la propriété de positive homogénéité de la norme euclidienne, qui permet de montrer que pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ il existe un entier $P > 2$ tel qu'il existe une fonction PWL qui approxime la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ avec une erreur ϵ, et que P est le nombre minimum de morceaux pour cette erreur. Cette fonction PWL est une pyramide régulière à P côtés.

4 Résultats

Le problème de beam layout consiste à orienter des faisceaux satellitaires vers la Terre pour couvrir des stations, l'objectif étant de desservir le plus grand trafic possible tout en respectant des contraintes de placement des faisceaux. Sachant qu'il est possible d'utiliser des faisceaux desservant des zones circulaires ou elliptiques, nous effectuons une comparaison numérique de notre linéarisation aux deux variantes du problème de beam layout (elles sont appelées ELLIPSE et CERCLE suivant la zone couverte par les faisceaux). La table 1 résume nos résultats en donnant un temps limite de 3600 secondes pour la résolution par CPLEX 12.9 sur un CPU des modèles de PLNE. Le nombre de stations considéré suivant les instances est choisi parmi $\{20, 40, 60, 80, 100\}$, et la densité des stations parmi $\{30, 70\}$. Pour un petit nombre de stations, ou pour une faible densité, la variante ELLIPSE du problème donne les meilleures valeurs objectifs. Cela montre l'intérêt pratique des linéarisations proposées.

densité \ Nombre de stations	20	40	60	80	100
30	Ellipse	Ellipse	Ellipse	Ellipse	Cercle
70	Ellipse	Ellipse	Cercle	Cercle	Cercle

TAB. 1 – Variante du problème de beam layout avec un temps limite de 3600 secondes donnant les plus grandes valeurs objectifs en moyenne pour un nombre de stations et une densité de stations fixés

Références

[1] J.-T. Camino, C. Artigues, L. Houssin, and S. Mourgues. Linearisation of euclidean norm dependent inequalities applied to multibeam satellites design. *Computational Optimization and Applications*, 2019.

[2] B. Geißler, A. Martin, A. Morsi, and L. Schewe. *Mixed Integer Nonlinear Programming*, chapter Using piecewise linear functions for solving MINLPs, pages 287–314. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol 154, 2012.

[3] S. U. Ngueveu. Piecewise linear bounding of univariate nonlinear functions and resulting mixed integer linear programming-based solution methods. *European Journal of Operational Research*, 275 :1058–1071, 2019.

[4] S. Rebennack and J. Kallrath. Continuous piecewise linear delta-approximations for bivariate and multivariate functions. *J Optim Theory Appl*, 2015.