Complexité du problème du Couplage Parfait Disconnectant

Valentin Bouquet[1], Christophe Picouleau[1]

Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC laboratory, Paris (France). :
valentin.bouquet@cnam.fr, christophe.picouleau@cnam.fr

Mots-clés : *Couplage parfait, arêtes disconnectantes, graphes planaires, graphes sans-P_5*

Nous montrons la complexité du problème du Couplage Parfait Disconnectant pour certaines classes de graphes, notamment, que ce problème est NP-complet pour les graphes planaires de degré maximum quatre et qu'il existe un algorithme polynomial pour les graphes sans-P_5 ou sans-griffes. Voir [2] et le tableau des résultats pour plus de précisions à ce sujet.

Introduction : Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, simple et non orienté. Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ non-adjacentes. Un couplage est parfait si tous les sommets sont couverts par une arête de ce couplage. Une coupe est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que le graphe $G - M$ (issu du retrait des arêtes M) est non-connexe. Le problème du Couplage Disconnectant consiste à trouver un couplage qui est une coupe dans le graphe. Ce problème a notamment été étudié par Chvátal [3] et Bonsma [1]. Nous étudions une version plus restrictive du problème où le couplage disconnectant doit être parfait, formellement défini dans l'encadré ci-dessous. La figure 1 présente à gauche un graphe ayant un couplage parfait mais pas de couplage disconnectant, au milieu un graphe ayant un couplage parfait, un couplage disconnectant mais pas de couplage parfait disconnectant et à droite un graphe ayant un couplage parfait disconnectant.

Couplage Parfait Disconnectant	
Instance :	un graphe connexe $G = (V, E)$.
Question :	existe t-il $M \subset E$ tel que M est un couplage parfait et $G - M$ est non-connexe ?

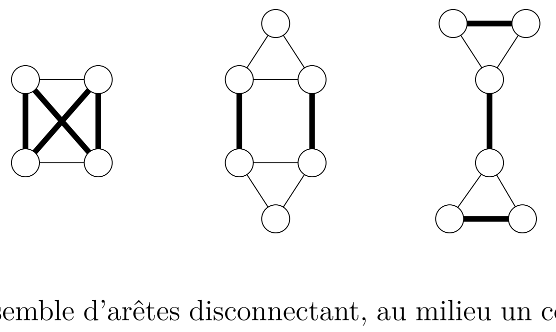

FIG. 1 – À gauche un ensemble d'arêtes disconnectant, au milieu un couplage disconnectant et à droite un couplage parfait disconnectant (voir les arêtes en gras).

Résultats : Nos résultats de complexité sont présentés dans le tableau ci-dessous. On rappelle les définitions et notations suivantes. Le degré maximum d'un sommet d'un graphe G est noté $\Delta(G)$. Un graphe est dit sans-H, où H est un graphe, si il n'existe pas de sous-graphe H induit dans G. Un graphe est planaire si il peut être dessiné dans le plan sans que les arêtes s'intersectent. Un graphe est de maille d si il n'existe aucun cycle induit de taille strictement inférieure à d. Le diamètre d'un graphe est la distance maximum d'un plus court chemin entre deux sommets du graphe. Un graphe est biparti si son ensemble de sommets peut-être partitionné en deux indépendants. On note P_5 le chemin induit à cinq sommets. Une griffe est un graphe biparti connexe avec une classe ayant un sommet et l'autre classe trois sommets. Un graphe est quadrangulé si il n'a aucun cycle induit de taille cinq ou plus.

Restrictions	Complexité
Biparti de diamètre trois	Polynomial
Biparti de diamètre quatre	NP-complet
Biparti cinq régulier	NP-complet
Diamètre deux	Polynomial
Diamètre trois	NP-complet
Planaire $\Delta(G) \leq 4$	NP-complet
Planaire de maille cinq	NP-complet
Quadrangulé	Polynomial
Sans-P_5	Polynomial
Sans-griffes	Polynomial

Références

[1] P. Bonsma, *The Complexity of the Matching-Cut Problem for Planar Graphs and Other Graphs Classes*, J. Graph Theory, 62 (2009), 109-126.

[2] V. Bouquet, Christophe Picouleau (2020), *The complexity of the Perfect Matching-Cut problem*, arXiv :2011.03318.

[3] V. Chvátal, *Recognizing decomposable Graphs*, J. Graph Theory, 8 (1984), 51-53.