Autour de l'approximabilité du problème de dimensionnement robuste des réseaux

Yacine AL-Najjar[12], Walid Ben-Ameur[1], Jeremie Leguay[2]

[1] Samovar, Telecom SudParis, Institut Polytechnique de Paris, France.
walid.benameur@telecom-sudparis.eu

[2] Huawei Technologies, Paris Research Center, France.
{yacine.alnajjar,jeremie.leguay}@huawei.com

Mots-clés : *Approximabilité, dimensionement robuste*

1 Introduction

Le dimensionnement des réseaux est une tâche cruciale pour les opérateurs de télécommunications. Cela leur permet de prévoir les ressources nécessaires pour faire face à la demande tout en maîtrisant les coûts. Cette tâche devient de plus en plus complexe à cause de la multiplication des sources et des types de trafic créant ainsi de plus en plus d'incertitude sur la demande. Il s'agit donc de prendre des décisions à moyen et à long terme en tenant compte de cette incertitude grandissante et de la difficulté de mesurer le trafic. Des modèles stochastiques sont parfois utilisés pour modéliser cette incertitude donnant lieu à des problèmes d'optimisation stochastique. Une autre approche qui a été étudiée depuis les années 2000 passe par l'optimisation robuste. Il s'agit ici de considérer un ensemble de scénarios de trafic qui pourrait être infini et de concevoir un réseau qui est capable de faire face à tous ces scénarios. Un modèle polyédral général a été introduit par [4]. Le dimensionnement s'accompagne souvent d'un routage. En supposant que la matrice de trafic varie dans un polytope $\mathcal{D}$, il est possible de dimensionner au moindre coût en supposant que le routage est statique [4, 2]. Ce dimensionnement se calcule en temps polynomial. Cependant, un routage statique peut induire un dimensionnement plus coûteux. Pour réduire les coûts, on peut chercher à introduire une certaine dynamicité ou adaptabilité. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature telles que le routage multi-statique [3] ou le routage affine [8, 9], etc. Un résultat attribué à A. Gupta (c.f. [5]) est que le problème de dimensionnement robuste avec routage dynamique peut être résolu avec un algorithme d'approximation en $O(\log n)$ où n est le nombre de nœuds du réseau. Il a aussi été démontré que ce problème est co-NP-difficile dans le cas non orienté [6]. Nous décrivons dans la suite le problème étudié d'une manière plus précise et nous présentons d'une manière concise nos résultats récemment parus dans [1].

2 Problème de dimensionnement robuste de réseau

Considérons un graphe non orienté $G = (V, E)$, un ensemble de commodités $\mathcal{H}$ (chaque commodité $h \in \mathcal{H}$ a une source $s(h)$ et une destination $t(h)$), un vecteur de coûts $\lambda \in \mathbb{R}^E$ représentant le coût de réservation d'une unité de capacité sur chaque lien et un polyèdre $\mathcal{D}$ décrivant l'ensemble des vecteurs de demandes $d \in \mathcal{D}$ possibles. Nous considérerons ici le cas où $\mathcal{D}$ est donné sous forme d'inégalité. Plus précisément, nous avons en entrée une matrice A et un vecteur b tels que l'ensemble des vecteurs de demandes soient $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}} | Ad \leq b\}$. Nous souhaitons calculer la capacité u_e à réserver sur chaque $e \in E$ de telle manière que, pour chaque vecteur de demandes $d \in \mathcal{D}$, il existe un multiflot respectant les contraintes de capacité (le flux traversant un arc e ne dépasse pas la capacité réservée u_e).

Nous notons $\mathcal{U}(\mathcal{D})$ l'ensemble des vecteurs de capacités $u \in \mathbb{R}_+^E$ pouvant satisfaire l'ensemble des demandes $\mathcal{D}$. Le problème du "coût linéaire" consiste à trouver un vecteur de capacité $u \in \mathcal{U}(\mathcal{D})$ minimisant le coût linéaire $\min\limits_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{D})} \sum\limits_{e \in E} \lambda_e u_e$. Etant donnée une capacité c_e pour chaque arc e, le problème de la "congestion" consiste lui à minimiser $\min\limits_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{D})} \max\limits_{e \in E} \frac{u_e}{c_e}$. Nous insistons ici sur le fait que le routage des commodités est dynamique (il varie en fonction de d).

3 Nos résultats

— En supposant que $P \neq NP$, nous montrons que la congestion minimale ne peut pas être approchée avec n'importe quel rapport constant. La réduction est basée sur le théorème PCP. On prouve également qu'il n'est pas possible de l'approcher avec un rapport de l'ordre de $\Omega(\log \frac{n}{\Delta})$ où Δ est le degré maximum dans le graphe.

— En utilisant une conjecture plus forte, la conjecture ETH, nous montrons que la congestion ne peut être approchée avec un facteur de $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$. Ceci prouve qu'il n'est pas possible d'obtenir beaucoup mieux que le rapport d'approximation $O(\log n)$ de [10].

— Nous montrons que s'il existe un algorithme approché de rapport α permettant de résoudre la variante "coût linéaire", alors il existerait aussi un algorithme avec le même rapport pour le problème de "congestion". La preuve est basée sur la relaxation Lagrangienne. Ceci nous permet de donner une nouvelle preuve de l'existence d'une $O(\log n)$ approximation de la congestion en partant de l'existence d'une approximation avec ce même rapport pour la variante "coût" linéaire.

— En combinant le résultat d'inaproximabilité du premier point avec l'approche Lagrangienne du point précèdent, nous montrons que dans le cas du "coût linéaire", on ne peut approcher l'optimum avec un rapport inférieur à n'importe quelle constante. Ceci nous permet de répondre à une question ouverte de [5] datant de 2007.

— Une autre conséquence de l'approche Lagrangienne est une preuve de l'existence d'instances pour lesquelles le rapport entre la congestion obtenue lorsque le routage est statique et celle qu'on obtiendrait avec un routage dynamique est de l'ordre de $\Omega(\log n)$. Ceci a déjà été prouvé différemment dans [7].

— Enfin, nous montrons que même lorsqu'on restreint le routage en supposant que seulement 2 chemins, fixés à l'avance, peuvent être utilisés pour router chaque commodité, la congestion ou le coût linéaire restent difficiles à approcher avec un rapport constant.

Références

[1] Yacine Al-Najjar, Walid Ben-Ameur, and Jérémie Leguay. On the approximability of robust network design. *Theoretical Computer Science*, 860 :41–50, 2021.

[2] David Applegate and Edith Cohen. Making intra-domain routing robust to changing and uncertain traffic demands : Understanding fundamental tradeoffs. In *Proceedings of the 2003 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*, pages 313–324, 2003.

[3] Walid Ben-Ameur. Between fully dynamic routing and robust stable routing. In *2007 6th International Workshop on Design and Reliable Communication Networks*, pages 1–6. IEEE, 2007.

[4] Walid Ben-Ameur and Hervé Kerivin. New economical virtual private networks. *Association for Computing Machinery. Communications of the ACM*, 46(6) :69–73, 2003.

[5] C. Chekuri. Routing and network design with robustness to changing or uncertain traffic demands. *ACM SIGACT News*, 38(3) :106–129, 2007.

[6] Chandra Chekuri, F Bruce Shepherd, Gianpaolo Oriolo, and Maria Grazia Scutella. Hardness of robust network design. *Networks : An International Journal*, 50(1) :50–54, 2007.

[7] Navin Goyal, Neil Olver, and F Bruce Shepherd. Dynamic vs. oblivious routing in network design. In *European Symposium on Algorithms*, pages 277–288. Springer, 2009.

[8] Adam Ouorou and J-Ph Vial. A model for robust capacity planning for telecommunications networks under demand uncertainty. In *International workshop on design and reliable communication networks*, pages 1–4. IEEE, 2007.

[9] M. Poss and C. Raack. Affine recourse for the robust network design problem : Between static and dynamic routing. *Networks*, 61(2) :180–198, 2013.

[10] Harald Räcke. Optimal hierarchical decompositions for congestion minimization in networks. In *Proceedings of the fortieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 255–264, 2008.