Sur la complexité de l'ensemble dominant indépendant avec des obligations dans les graphes

Christian Laforest, Timothée Martinod

Université Clermont Auvergne, Clermont Auvergne INP, LIMOS, CNRS UMR 6158, Aubière, France
{christian.laforest,timothee.martinod}@uca.fr

Mots-clés : *complexité, graphes, domination.*

Les résultats présentés sont détaillés dans [7].

Problématique. Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant *indépendant* (ou *stable*) d'un graphe $G = (V, E)$ si D est un ensemble indépendant (aucune arête entre les sommets de D) et dominant tous les sommets de G (chaque sommet de $V - D$ a un voisin dans D). Nous étudions une généralisation de cette notion. Une instance de notre problème est un graphe $G = (V, E)$ et $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ une partition de V. Chaque sous-ensemble V_i de Π est appelé une *obligation.* Un ensemble Dominant Indépendant avec Obligations (*IDO*) D dans une instance (G, Π) est un ensemble dominant indépendant de G avec la contrainte supplémentaire que si un sommet u d'une obligation V_i est dans D, alors *tous* les autres sommets de V_i doivent aussi appartenir à D : pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit $V_i \cap D = \emptyset$ soit $V_i \subseteq D$ (on dit que D *respecte* les obligations). Le problème de décider si une instance (G, Π) a un *IDO* sera nommé *problème IDO.* N.B. : si chaque obligation de Π est un singleton, un *IDO* est simplement un ensemble dominant indépendant de G qui peut être construit avec un algorithme glouton.

Contexte. L'étude de problèmes de graphes classiques avec des contraintes supplémentaires n'est pas nouvelle. Récemment, la notion de "conflit" a été introduite : à un graphe $G = (V, E)$, est ajouté un ensemble de paires d'éléments de G (sommets ou arêtes) qui ne peuvent *pas* appartenir à la même solution (une solution peut être un chemin, un arbre, un ensemble dominant, etc. selon l'objectif). À l'opposé des obligations, un conflit modélise le fait que deux éléments d'un système ne peuvent pas être utilisés simultanément, par exemple parce qu'ils sont incompatibles. La plupart des problèmes avec conflits sont difficiles. Voici quelques publications récentes sur le sujet : [1, 2, 4, 5, 6, 8, 9].

La notion d'obligation a initialement été introduite dans [3] ; elle peut aider à modéliser des situations dans laquelle les éléments doivent être mobilisés non pas individuellement mais collectivement (équipe de personnes, ensemble de ressources, etc.). Parmi les problèmes ainsi revisités, les auteurs ont prouvé que décider si une instance a un *IDO* est NP-complet, même si les obligations ont une taille maximale de deux. Cependant, lors de la réduction, ils ont utilisés des obligations dont certaines sont non-stables, c'est-à-dire des obligations qui ne peuvent appartenir à aucune solution. Nous levons ici cette restriction en étudiant des instances composées uniquement d'obligations qui sont des ensembles stables du graphe.

Résultats. S'il existe une constante λ telle que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, $|V_i| = \lambda$ alors nous disons que les obligations sont λ-équilibrées. Nous prouvons que le problème *IDO* est NP-complet dans différents cas, selon la topologie du graphe et les tailles des obligations. Dans la suite, un *chemin* est un graphe connexe dans lequel chaque sommet a exactement deux voisins, sauf deux extrémités qui en ont un seul. Un graphe est une *collection de chemins disjoints* s'il est seulement composé de chemins qui sont sommet-disjoints par paire (c'est-à-dire s'il s'agit d'une forêt de chemins). La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre du programme "Investissements d'Avenir" dans le cadre du Laboratoire d'Excellence IMobS3 (ANR-10-LABX-0016) et de l'Initiative d'Excellence IDEX-ISITE CAP 20-25 (ANR-16-IDEX-0001).

résoudre dans les chemins. Cependant, nous montrons que le problème *IDO* est NP-complet, même si G est un chemin et que toutes les obligations sont stables et λ-équilibrées pour toute constante $\lambda \geq 2$ (N.B. si les obligations sont 1-équilibrées, le problème *IDO* est polynomial). Nous montrons également que même si le graphe a un diamètre trois et que les obligations sont stables et λ-équilibrées pour toute constante $\lambda \geq 2$, le problème *IDO* demeure NP-complet.

Si les obligations sont de taille non constantes, nos résultats sont les suivants. Le problème *IDO* est NP-complet même dans des instances $(G = (V, E), \Pi)$ où les obligations sont stables et $\sqrt{|V|}$-équilibrées (il y a $\sqrt{|V|}$ obligations, chacune de taille $\sqrt{|V|}$). Nous montrons également plusieurs autres résultats de NP-complétude avec d'autres comparaisons entre la taille et le nombre d'obligations.

En raison de tous ces résultats de NP-complétude, nous avons relâché la contrainte de dominer *tous* les sommets du graphe en introduisant une version de maximisation appelée problème de l'*ensemble Partiellement Dominant Indépendant avec Obligations* (*PIDO*). Nous montrons que décider si une instance $(G = (V, E), \Pi)$ contient un ensemble indépendant $D \subseteq V$ de $G = (V, E)$, qui respecte les obligations de Π et qui domine au moins $3\sqrt{|V|} - 2$ sommets de G est NP-complet, même si G est une collection de chemins disjoints et que les obligations sont toutes stables. De l'autre côté, nous proposons un algorithme polynomial qui construit une solution pour toute instance $(G = (V, E), \Pi)$, qui domine au moins $2\sqrt{|V|} - 1$ sommets si les obligations sont toutes stables.

Références

[1] Alexis Cornet and Christian Laforest. Total domination, connected vertex cover and steiner tree with conflicts. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 19(3), 2017.

[2] Alexis Cornet and Christian Laforest. Domination problems with no conflicts. *Discret. Appl. Math.*, 244 :78–88, 2018.

[3] Alexis Cornet and Christian Laforest. Graph problems with obligations. In *Combinatorial Optimization and Applications*, volume (LNCS) 11346, pages 183–197, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[4] Mamadou Moustapha Kanté, Christian Laforest, and Benjamin Momège. An exact algorithm to check the existence of (elementary) paths and a generalisation of the cut problem in graphs with forbidden transitions. In *SOFSEM 2013 Proceedings*, volume 7741 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–267. Springer, 2013.

[5] Mamadou Moustapha Kanté, Christian Laforest, and Benjamin Momège. Trees in graphs with conflict edges or forbidden transitions. In *Theory and Applications of Models of Computation, 10th International Conference, TAMC 2013. Proceedings*, volume 7876 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 343–354. Springer, 2013.

[6] Mamadou Moustapha Kanté, Fatima Zahra Moataz, Benjamin Momège, and Nicolas Nisse. Finding paths in grids with forbidden transitions. In *41st International Workshop, WG 2015*, volume 9224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 154–168. Springer, 2015.

[7] Christian Laforest and Timothée Martinod. On the complexity of Independent Dominating Set with Obligations in graphs. Rapport HAL (soumis à publication au journal TCS). https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02946979, September 2020.

[8] Christian Laforest and Benjamin Momège. Some hamiltonian properties of one-conflict graphs. In *25th International Workshop, IWOCA 2014*, volume 8986 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 262–273. Springer, 2014.

[9] Christian Laforest and Benjamin Momège. Nash-williams-type and chvátal-type conditions in one-conflict graphs. In *SOFSEM 2015 Proceedings*, volume 8939 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 327–338. Springer, 2015.