Résolution de problèmes d'ordonnancement sur machines parallèles par Inclusion-Exclusion

Olivier Ploton[1], Vincent T'kindt[1]

Université de Tours, Laboratoire d'Informatique Fondamentale et Appliquée (LIFAT, EA 6300), ERL CNRS 7002 ROOT, Tours, France

{olivier.ploton,vincent.tkindt}@univ-tours.fr

Mots-clés : *ordonnancement, algorithmique exponentielle, Inclusion-Exclusion.*

1 Introduction

Dans ce travail nous nous intéressons à deux types de problèmes d'ordonnancement impliquant n travaux dans un environnement à m machines parallèles indépendantes. Chaque travail i, lorsqu'il est traité par la machine j, est défini par une durée opératoire p_{ij}, une date de début r_{ij} et une date de fin impérative $\tilde{d}_{ij}$. Il lui est associé un coût f_{ij} qui est fonction de la date de fin C_{ij}. L'objectif est de minimiser le maximum ou la somme des coûts. Ces problèmes, notés $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{\max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ ([3]), sont $\mathcal{NP}$-difficiles au sens fort.

Nous nous intéressons à la résolution exacte de ces problèmes et notamment à l'établissement de bornes sur les complexités temporelles et spatiales au pire cas. La taille d'une instance est son nombre de travaux n. La mesure d'une instance I est la somme des durées opératoires : $||I|| = \sum p_{ij}$. De nombreux cas particuliers ont été étudiés, mais il existe peu de résultats dans le cas de fonctions de coûts arbitraires. Il est décrit dans [5] un algorithme résolvant les problèmes $P||f_{\max}$ et $P||\sum f_i$ avec une complexité spatiale et temporelle en $O^*(3^n)$.

Nous nous restreignons à des fonctions de coût régulières, dont le résultat est polynomial en la mesure de l'instance : $f_{ij} = O(||I||^{O(1)})$. C'est le cas des fonctions de coût classiques : la date de fin C_{ij}, le retard positif T_{ij}, l'indicateur de retard U_{ij} et n'importe quelle combinaison à coefficients positifs. Nous montrons, grâce à la technique d'Inclusion-Exclusion, que les problèmes $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{\max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ peuvent être résolus avec une complexité temporelle pire cas en $O^*(2^n||I||^{O(1)})$ et en espace pseudo-polynomial.

L'intérêt de la formule d'Inclusion-Exclusion est qu'elle permet de décider si un problème admet une solution sans jamais en expliciter. Cette technique, décrite dans [2], a été appliquée à des problèmes de graphes $\mathcal{NP}$-difficiles comme les chemins hamiltoniens [1, 4], les arbres de Steiner et les correspondances parfaites [7]. Elle a été peu utilisée en ordonnancement ([4, 6]).

2 La technique d'Inclusion-Exclusion

La formule d'Inclusion-Exclusion peut s'appliquer à des ensembles de listes vérifiant un critère. Chaque ordonnancement S peut se représenter par une double liste $S = (i_{jk})_{j,k}$ constituée des travaux traités par chaque machine j, dans l'ordre chronologique k. Ordonnancer sur des machines parallèles est à la fois un problème d'affectation (machine affectée à chaque travail) et un problème de séquencement (ordre des travaux sur chaque machine).

La technique d'Inclusion-Exclusion se décompose en plusieurs phases. (1) Relâcher le problème en s'autorisant à dupliquer des travaux. (2) Compter le nombre d'ordonnancements relâchés quand seulement certains travaux sont autorisés. (3) Appliquer la formule d'Inclusion-Exclusion pour compter le nombre d'ordonnancements relâchés où tous les travaux apparaissent. (4) En déduire s'il existe un ordonnancement du problème initial.

Pour un critère de validité $\mathcal{V}(S)$ qui vérifie si l'ordonnancement relâché S a un objectif inférieur ou égal à une limite donnée, notant X l'ensemble des travaux autorisés, et assimilant une liste à l'ensemble de ses éléments, la formule d'Inclusion-Exclusion s'exprime comme suit :

$$\underbrace{\mathrm{card}\,\{S \mid \mathcal{V}(S) \wedge \{1 \dots n\} \subset S\}}_{\text{nombre de solutions}} = \sum_{X \subset \{1 \dots n\}} (-1)^{n-|X|} \underbrace{\mathrm{card}\,\{S \mid \mathcal{V}(S) \wedge S \subset X\}}_{N_X \text{ à calculer}} \tag{1}$$

Cette approche a deux avantages. (1) Elle transforme la partie séquencement, dont la résolution est en $O^*(n!)$, en $O^*(2^n)$ problèmes relâchés. (2) Un problème relâché sur m machines parallèles se réduit à m problèmes indépendants à une seule machine, dont chacun est résoluble en temps et espace pseudo-polynomial.

3 Application aux problèmes à machines parallèles

Grâce à la technique d'Inclusion-Exclusion, on résout le problème de décision : étant donnés une instance I et une limite ε, déterminer s'il existe ou non un ordonnancement d'objectif ε ou moins. Mais le dénombrement est radicalement différent pour un objectif type maximum et type somme.

- Pour un objectif de type maximum, on détermine classiquement, pour chaque limite ε, le nombre d'ordonnancements vérifiant $f_{max} \leq \varepsilon$.
- Pour un objectif de type somme, le dénombrement s'effectue sur tous les ε en même temps, c'est-à-dire sur la série génératrice du nombre d'ordonnancements.

À partir du problème de décision, on détermine l'objectif optimum, i.e. la plus petite valeur ε pour laquelle il existe une solution. Puis on détermine une solution optimale comme suit : partir d'un ordonnancement vide. Parmi tous les travaux restant à placer, trouver le premier placement qui conduit à une solution, ce qui revient à décider si une sous-instance a une solution. Continuer jusqu'à ce que tous les travaux aient été placés.

4 Conclusion

L'algorithme présenté montre qu'il est possible de résoudre les problèmes $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{\max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ avec une garantie théorique de temps $O^*(2^n||I||^{O(1)})$ et un espace pseudo-polynomial. Cela constitue une première contribution de la formulation par Inclusion-Exclusion par rapport au résultat dans [5].

Références

[1] E.T. Bax. Inclusion and exclusion algorithm for the Hamiltonian path problem *Information Processing Letters*, 47(4) : 203–207, 1993.

[2] F.V. Fomin, D. Kratsch. Exact exponential algorithms. Springer, 2010.

[3] R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling Problems : a Survey. *Proceedings of the ARI on Discrete Optimization and Systems Applications*, Elsevier, (5) : 287–326, 1979.

[4] R.M. Karp. Dynamic Processing meets the principle of inclusion and exclusion. *Operational Research Letters*, 1(2) : 49–51, 1982.

[5] C. Lenté, M. Liedloff, A. Soukhal, V. T'Kindt. Exponential Algorithms for Scheduling Problems. *https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00944382.*

[6] J. Nederlof. Inclusion-Exclusion for hard problems. Master Thesis, Utrecht University. 2008.

[7] J. Nederlof. Fast Polynomial-Space Algorithms Using Inclusion-Exclusion. *Algorithmica*, 65 : 868–884, 2013.